	UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA MAYORES DE 25 AÑOS AÑO **2025** **MATERIA**: MATEMÁTICAS II	MODELO

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se calculará sobre las respuestas dadas a una de las dos opciones. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni simbólicas.
Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.

TIEMPO: 90 minutos

OPCIÓN A

A.1. Puntuación máxima: 2,5 puntos
De dos matrices A y B cuadradas de tamaño 2 se sabe que satisfacen las relaciones matriciales $2A + 3B = 2I$ y $6A - B = J$, siendo I la matriz identidad de tamaño 2 y $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) (1,5 puntos) Calcule las matrices A y AB^{-1}.
b) (1 punto) Discuta el sistema de ecuaciones $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + aI\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$ según el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$

A.2. Puntación máxima: 2,5 puntos.
Se considera la función definida en su dominio $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{x-2}, & x < 0 \\ \frac{e^x}{x^2-4}, & x \geq 0 \end{cases}$. Se pide

a) (0,75 puntos) Determinar la continuidad y la diferenciabilidad en el dominio.
b) (0,75 puntos) Determinar las asíntotas verticales, horizontales u oblicuas.
c) (1 punto) Calcular $\int_{-1}^{1}(x^2-4)f(x)dx$.

A.3. Puntuación máxima: 2,5 puntos.
Se considera la recta $r: (1+\lambda, 2-\lambda, 2\lambda)$ y la recta $s: (2-2\lambda, 1+\lambda, 1+\lambda)$. Se pide:

a) (0,75 puntos) Determinar la posición relativa de las rectas y la distancia entre ellas.
b) (1,75 puntos) Determinar, si la hay, la recta perpendicular y secante a r y a s.

A.4. Puntuación máxima: 2,5 puntos
En una bolsa hay bolas numeradas del 1 al 9. Se van a extraer dos bolas según el procedimiento siguiente. Se extrae la primera bola. Si el número es primo (el 1 no se considera primo), se repone la bola, se anota el número y se le suma el valor de la siguiente bola. Si el número de la primera bola no es primo, no se repone la bola a la bolsa, se anota el número y se le resta el número de la siguiente bola que se extrae.

a) (1 punto) Calcúlese la probabilidad de que el resultado final sea 2.
b) (1,5 puntos) Si el valor final es 3, calcular la probabilidad de que el primer número sea primo.

OPCIÓN B

B.1. Puntuación máxima: 2,5 puntos.
Una cliente de un banco posee una cartera de inversión formada por acciones de tres empresas. Las acciones de la empresa A valen 10€ cada una. Las acciones de la expresa B valen 12€ cada una. Las acciones de la empresa C valen 5€ cada una. La cliente tiene un total de 1.525€ en esa cartera. Además, se sabe que el número de acciones de la empresa B más el número de acciones de la empresa C le falta 5 para ser el número de acciones de la empresa A. También, cinco veces el número de acciones de la empresa A es igual a siete veces el número de acciones de la empresa B más dos veces el número de acciones de la empresa C. Determine el número total de acciones y el dinero que obtendrá si vende las acciones de A y B.

B.2. Puntuación máxima: 2,5 puntos.
Para cada número real a no nulo se considera la función $f_a(x) = x^3 + ax^2 + a^2x + a^3$.

a) (0,75 puntos) Determínese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f_a(x)$ en $x = -a$. ¿Para qué valor de a es la pendiente de esta recta igual a $\frac{1}{2}$?
b) (0,75 puntos) Encuentre, si los hay, los extremos relativos de $f_a(x)$.
c) (1 punto) Determine el área de la región delimitada entre $f_1(x)$ y $f_2(x)$ en el intervalo [0,1].

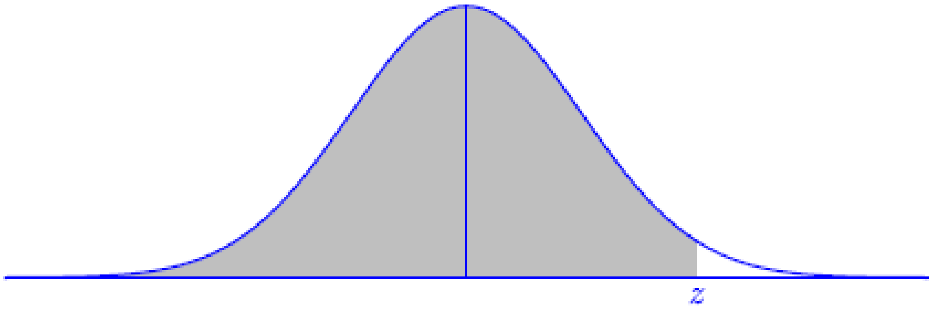
B.3. Puntuación máxima: 2,5 puntos.
Desde el punto $P(1,0,4)$ se extiende un segmento recto hasta el punto $Q(-2,-1,1)$. Se pide:

a) (1 punto) Calcular el punto de corte, si lo hay, de ese segmento con el plano $\pi: x + y = -1$ y el ángulo de corte con el plano.
b) (1 punto) Calcular el plano π'que equidista de P y Q.
c) (0,5 puntos) La recta paralela a $\pi \cap \pi'$ que pasa por P.

B.4. Puntuación máxima: 2,5 puntos.
En una estantería hay 200 botes de conservas de tres variedades diferentes. Hay 100 botes de tomate, y el resto a partes iguales son botes de pimientos y botes de alcachofas.

a) (1 punto) Se escogen 6 botes al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que haya al menos 2 botes de alcachofas?
b) (1,5 puntos) Aproximando por una normal, determinar la probabilidad de que haya más de 45 botes de pimientos en un lote de 160 botes extraídos de la estantería al azar.

Distribución Normal



Ejemplo: si Z tiene distribución $N(0,1)$, $P(Z < 0{,}45) = 0{,}6736$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

MATEMÁTICAS II
CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

OPCIÓN A

En cada pregunta, aunque el procedimiento seguido sea diferente al propuesto en el documento de soluciones, cualquier argumento válido que conduzca a la solución será valorado con la puntuación asignada.
Se penalizará en la calificación de cada respuesta la falta de justificación razonada o de precisión y se valorarán las estrategias, razonamientos y toma adecuada de decisiones.

A.1.
a) Planteamiento 1 punto. Resolución A: 0,25 puntos. Resolución de AB^{-1}. 0,25 puntos.
b) Determinación de los valores críticos: 0,25 puntos. Discusión: 0,25 puntos cada caso.

A.2.
a) Continuidad: 0,25 puntos. Diferenciabilidad: 0,5 puntos.
b) Cada tipo de asíntota: 0,25 puntos
c) Primitiva: 0,5 puntos. Resolución: 0,5 puntos.

A.3.
a) Posición relativa: 0,5 puntos. Distancia: 0,25 puntos.
b) Planteamiento 1,25 puntos. Resolución 0,5 puntos.

A.4.
a) Planteamiento: 0,5 puntos. Resolución: 0,5 puntos.
b) Planteamiento: 1 punto. Resolución: 0,5 puntos.

OPCIÓN B

En cada pregunta, aunque el procedimiento seguido sea diferente al propuesto en el documento de soluciones, cualquier argumento válido que conduzca a la solución será valorado con la puntuación asignada.
Se penalizará en la calificación de cada respuesta la falta de justificación razonada o de precisión y se valorarán las estrategias, razonamientos y toma adecuada de decisiones.

B.1.
Cada ecuación bien escrita: 0,5 puntos. Resolución correcta del sistema: 0,75 puntos (si se resuelve correctamente un sistema incorrecto, se podrá dar hasta 0,5 puntos). Respuestas a las preguntas: 0,25 puntos.

B.2.
a) Planteamiento recta tangente: 0,25 puntos. Resolución recta tangente: 0,25 puntos. Resolución pendiente: 0,25 puntos.
b) Planteamiento: 0,5 puntos. Resolución: 0,25 puntos.
c) Determinación correcta de la región: 0,5 puntos. Cálculo de la primitiva: 0,25 puntos. Respuesta: 0,25 puntos.

B.3.
a) Planteamiento punto de corte: 0,25 puntos. Resolución punto de corte: 0,25 puntos. Planteamiento ángulo: 0,25 puntos. Resolución ángulo: 0,25 puntos.
b) Planteamiento: 0,5 puntos. Resolución: 0,5 puntos.
c) Planteamiento: 0,25 puntos. Resolución: 0,25 puntos.

B.4.
a) Planteamiento: 0,5. Resolución: 0,5 puntos.
b) Planteamiento: 0,5. Tipificación: 0,5 puntos. Resolución: 0,5 puntos.

MATEMÁTICAS II
SOLUCIONES

A.1.

a) Multiplicando la primera relación por -3 y sumando la segunda relación obtenemos $-10B = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}$, y así $B^{-1} = \frac{10}{37}\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$. SI multiplicamos la segunda relación por 3 y le sumamos la segunda obtenemos $20A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Así $A = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} y\ AB^{-1} = \frac{1}{74}\begin{pmatrix} 9 & 20 \\ -20 & 9 \end{pmatrix}$.

b) La matriz de coeficientes $\begin{pmatrix} 3+a & 1 \\ -2 & a \end{pmatrix}$ tiene determinante $a^2 + 3a + 2$, que se anula para $a = -1, -2$. Para $a \neq -1, -2$, el sistema es compatible determinado. Para $a = -1$, la matriz de coeficientes y la ampliada tiene rango 1, así que es un sistema compatible indeterminado con un grado de libertad. Para $a = -2$, el rango de la matriz ampliada es 2 y el sistema es incompatible.

A.2.

a) El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{2\}$. Como la función es cociente de funciones continuas, el único punto en donde puede haber problemas de continuidad es el 0. Pero en ese punto los límites laterales y el valor de la función coinciden, por lo que la función es continua en el dominio. En cuanto a la derivada, de nuevo, el único punto delicado es el 0. En él se tiene que $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x(x-3)}{(x-2)^2} \neq \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x(x^2-2x-4)}{(x^2-4)^2} = \lim_{x\to 0^+} f'(x)$, por lo que la función no es diferenciable en 0.

b) Se tiene que $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0, \lim_{x\to 2} f(x) = \infty,\ \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$, por lo que hay una asíntota horizontal $y = 0$ en la rama izquierda, una asíntota vertical en $x = 2$, y ninguna asíntota en la rama derecha de la gráfica.

c) $\int_{-1}^{1}(x^2-4)f(x)dx = \int_{-1}^{0}(x+2)e^x dx + \int_0^1 e^x dx = ((x+2)e^x - e^x)|_{-1}^{0} + e^x|_0^1 = e.$

A.3.

a) Se tiene que $\det((1,-1,2), (-2,1,1), (1,-1,1))$=1 por lo que las rectas se cruzan. La distancia es $\frac{1}{\|(1,-1,2)\times(-2,1,1)\|} = \frac{1}{\|(-3,-5,-1)\|} = \frac{1}{\sqrt{35}}$.

b) La perpendicular común se puede calcular como el corte de los siguientes planos

$$\det\begin{pmatrix} x-1 & y-2 & z \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & -5 & -1 \end{pmatrix} = 11x - 5y - 8z - 1 = 0.$$

$$\det\begin{pmatrix} x-2 & y-1 & z-1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -3 & -5 & -1 \end{pmatrix} = 4x - 5y + 13z - 16 = 0$$

La yuxtaposición de estas dos ecuaciones es la recta buscada.

A.4.

a) Los posibles valores de las dos bolas pueden ser (4,2), (6,4), (8, 6) y (9,7). La probabilidad es $4\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{18}$.

b) $P(primo|3) = \frac{P(primo \cap 3)}{P(3)}$. Tenemos que el numerador se da para el par (2,1). Por otra parte, la probabilidad de 3 se obtiene para los pares (2,1), (4,1), (6,3), (8,5) y (9,6). Así la probabilidad es $\frac{\frac{1}{81}}{\frac{1}{81}+4\frac{1}{72}}$.

B.1.

Si *A*, *B,* C denota el número de acciones de cada empresa respectivamente, tenemos

$$\begin{cases} 10A + 12B + 5C = 1525 \\ A - B - C = 5 \\ 5A - 7B - 2C = 0 \end{cases}$$

Que tiene por solución *A*=80, *B*=50 y *C*=25. Así que la cliente tiene 155 acciones y ganará 1.400€ si vende *A* y *B.*

B.2.

a) Tenemos que de $f_a(-a) = 0$ y $f'_a(-a) = 2a^2$. Así la recta tangente es $y = 2a^2(x + a)$ y la pendiente es ½ para $a = \frac{1}{2}$.

b) La ecuación $f'_a(x) = 3x^2 + 2ax + a^2 = 0$, tiene raíces complejas para cualquier $a \neq 0$. Así no hay extremos relativos.

c) En el intervalo [0,1] se tiene que $f_2(x) \geq f_1(x) \geq 0$, por lo que el área pedida es $\int_0^1 (f_2(x) - f_1(x)\,)dx$=$\int_0^1 (x^2 + 3x + 7)dx = \frac{1}{3} + \frac{3}{2} + 7$.

B.3.

a) El segmento es $(1 + 3\lambda,\ \lambda, 4 + 3\lambda)$ con $-1 \leq \lambda \leq 0$. El punto de corte con es con $\lambda = -\frac{1}{2}$, que corresponde con el punto del segmento $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$. El ángulo de corte satisface $\sin \alpha = \frac{|(3,1,3)\cdot(1,1,0)|}{\|(3,1,3)\|\cdot\|(1,1,0)\|} = \frac{4}{\sqrt{38}}$.

b) Los puntos que equidistan de los dos puntos satisfacen $(x - 1)^2 + y^2 + (z - 4)^2 = (x + 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2$, es decir $4x + 2y + 6z - 11 = 0$.

c) Las rectas paralelas a $\pi \cap \pi'$, tienen por expresión $\begin{cases} x + y = A \\ 4x + 2y + 6z = B \end{cases}$. Para que pase por *P* se tiene *A*=1, *B*=28.

B.4

a) Usando la binomial, la probabilidad pedida es

$$P(A \geq 2) = 1 - P(A = 0) - P(A = 1) = 1 - \binom{6}{0}\left(\frac{3}{4}\right)^6 - \binom{6}{1}\left(\frac{3}{4}\right)^5\left(\frac{1}{4}\right).$$

b) La distribución se aproxima a una normal $X = N\left(\frac{160}{4}, \sqrt{\frac{480}{16}}\right) = N(40, \sqrt{30})$. Así, la probabilidad pedida es

$$P(X > 45) = P\left(Z > \frac{45 - 40}{\sqrt{30}}\right) = P\left(Z > \frac{5}{\sqrt{30}}\right) \cong P(Z > 0{,}91) = 1 - P(Z < 0{,}91)$$
$$\cong 1 - 0{,}8186 = 0{,}1814.$$